Blatt 2

zum Donnerstag, 02.11.17

1. Ein Verband $\langle V, \sqcup, \sqcap \rangle$ heißt *beschränkt*, wenn es $0_V \in V$ und $1_V \in V$ gibt, sodass für alle $a \in V$: $0_v \sqsubseteq a \sqsubseteq 1_V$. Zeigen Sie:
   a) Wenn 0_V und 1_V, existieren, so sind diese stets eindeutig bestimmt.
   b) In einem beschränkten Verband ist $1_V \sqcap a = a$, $1_V \sqcup a = 1$, $0_V \sqcup a = a$.
   c) Es gibt nicht beschränkte Verbände.

2. Ein Verband $\langle V, \sqcup, \sqcap \rangle$ heißt *distributiv* gdw. für beliebige $a, b, c \in V$ nachfolgende Bedingungen erfüllt ist
   (D_1) $\quad a \sqcup (b \sqcap c) = (a \sqcup b) \sqcap (a \sqcup c)$.
   Zeigen Sie:
   a) (D_1) gilt genau dann, wenn (D_2) oder (D_3) gilt, wobei
      (D_2) $\quad a \sqcap (b \sqcup c) = (a \sqcap b) \sqcup (a \sqcap c)$
      (D_3) $\quad (a \sqcap b) \sqcup (a \sqcap c) \sqcup (b \sqcap c) = (a \sqcup b) \sqcap (a \sqcup c) \sqcap (b \sqcup c)$
   b) In jedem Verband gilt $a \sqcap (b \sqcup c) \sqsupseteq (a \sqcap b) \sqcup (a \sqcap c)$.
   c) Jeder distributive Verband ist *modular*[1], d.h. für beliebige $a, b, c \in V$ gilt
      (M_1) $\quad$ Wenn $a \sqsubseteq c$, so gilt $a \sqcup (b \sqcap c) = (a \sqcup b) \sqcap c$.
   d) Die Struktur $\langle V, \sqsubseteq \rangle$, mit $V = \{a, b, c, d, e\}$ und
      $\sqsubseteq = \{(a, a)(a, b), (a, c), (a, d), (a, e), (b, b), (b, e), (c, c), (c, d), (c, e), (d, d), (d, e), (e, e)\}$
      ist nicht modular.

3. Formulieren Sie in wenigen Sätzen eine Begründung, warum das Verbandsordnung $\sqsubseteq$ in logischen Kontexten mit $\vdash$, $\vDash$ resp. $\Rightarrow$ angemessen übersetzt ist!

[1] gleichwertig zu (M_1) ist die Bedingung (M_2): $a \sqcup (b \sqcap (a \sqcup c)) = (a \sqcup b) \sqcap (a \sqcup c)$