Blatt 1

zum Donnerstag, 26.10.17

1. Sei $\langle V, \sqcup, \sqcap \rangle$ ein Verband. Zeigen Sie, dass für beliebige $a \in V$ gilt:
$$a \sqcup a = a.$$

2. Gegeben sei eine vierelementige Menge $A_4 = \{0, a, b, 1\}$ mit einer zweistelligen Relation $\sqsubseteq$, die beschrieben werden kann durch
$$\sqsubseteq = \{(0,0), (0,a), (0,b), (0,1), (a,a), (a,1), (b,b), (b,1)(1,1)\}.$$
Zu zeigen ist nun:
   a) $\langle A_4, \sqsubseteq \rangle$ ist eine Halbordnungsstruktur
   b) Definiert man $\sqcup$ und $\sqcap$ wie üblich aus $\sqsubseteq$, so ist $\langle A_4, \sqcup, \sqcap \rangle$ ein Verband.

3. Beweisen Sie die Adjunktivitätsbedingungen für die Algebra $\langle FOR_{\equiv}, \wedge, \vee \rangle$

4. Zeigen Sie, dass in einer Halbordnung, in der für je zwei Elemente a und b stets $inf(a, b)$ und $sup(a, b)$ definiert sind:
$$inf(a, sup(a, b)) = a \quad \text{sowie} \quad sup(b, inf(a, b)) = b.$$
Tipp: Sie können davon Gebrauch machen, das $inf(x, y) \leq inf(x, z)$, falls $y \leq z$.

5. Zeigen Sie, dass in einem (operationalen) Verband gilt:
$$a \sqcup b = a \text{ iff } a \sqcap b = b.$$

6. Zeigen Sie:
Im Verband $\langle\ \mathcal{P}(A), \cap, \cup\ \rangle$ ist $H_1 \cap H_2$ das Infimum von H_1 und H_2 bezüglich $\subseteq$.