

Die dreiwertige Logik $\mathbb{L}_3$ ¹

abzugeben am: Donnerstag, 08.06.17

Aufgaben:

1. Weisen Sie folgende Behauptungen nach!

- a) $\models_{\mathbb{L}_3} \neg(p \wedge q) \rightarrow (\neg p \vee \neg q)$
- b) $\not\models_{\mathbb{L}_3} ((p \rightarrow q) \rightarrow p) \rightarrow p$
- c) $\models_{\mathbb{L}_3} ((p \rightarrow \neg p) \rightarrow p) \rightarrow p$
- d) $\not\models_{\mathbb{L}_3} \neg(p \wedge \neg p)$
- e) $\not\models_{\mathbb{L}_3} p \vee \neg p$

2. Offensichtlich gilt $\models_{\mathbb{L}_3} H \Rightarrow \models_{\text{KAL}} H$. Welche Beziehung besteht zwischen

$$\Gamma \models_{\mathbb{L}_3} H \text{ und } \Gamma \models_{\text{KAL}} H?$$

3. Beweisen Sie

- a) $p, p \rightarrow (p \rightarrow q) \models_{\mathbb{L}_3} q$,
- b) $p \rightarrow (p \rightarrow q) \not\models_{\mathbb{L}_3} p \rightarrow q$, und
- c) leiten Sie hieraus eine Schlussfolgerungen hinsichtlich der Gültigkeit eines bedeutsamen Satzes (Metatheorie) ab.

4. Prüfen Sie, welche der Ausdrücke $\mathbb{L}_3$ -allgemeingültig sind:²

- a) $\Box(A \rightarrow B) \rightarrow (\Box A \rightarrow \Box B)$
- b) $\Box \Diamond A \rightarrow A$
- c) $\Box(A \vee \neg A)$
- d) $\Diamond A \wedge \Diamond B \rightarrow \Diamond(A \wedge B)$

5. Zeigen Sie, dass der Ausdruck

$$(p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r))$$

nicht im Wajsberg-Kalkül für $\mathbb{L}_3$ beweisbar ist.

6. Offensichtlich gilt $\models_{\mathbb{L}_3} H \Rightarrow \models_{\mathbb{L}_3^*} H$. Zeigen Sie nun, dass es solche Γ und H gibt mit

- a) $\Gamma \models_{\mathbb{L}_3^*} H$ und $\Gamma \not\models_{\mathbb{L}_3} H$ sowie solche mit
- b) $\Gamma \models_{\mathbb{L}_3} H$ und $\Gamma \not\models_{\mathbb{L}_3^*} H$

¹Es gilt eine 2 aus x -Regelung!

²Hier sei $\Diamond A =_{\text{def.}} \neg A \rightarrow A$, $\Box A =_{\text{def.}} \neg \Diamond \neg A$.