Probeklausur Klassische Logik

26. Januar 2020

Name, Vorname:

Matrikelnummer:

1. Geben Sie wenigstens einen Ausdruck H mit drei Aussagenvariablen an, der die folgende Wahrheitswertfunktione realisiert:

   H ist genau dann wahr, wenn genau zwei Aussagenvariablen den Wert wahr haben.

2. Von den Ausdrücken $H_1 \to H_2$, $H_2 \to H_1$, $\neg H_1 \to \neg H_2$, $\neg H_2 \to \neg H_1$ ist bekannt, dass alle vier denselben Wahrheitswert haben.
   a) Was kann man über die Wahrheitswerte von H_1 und H_2 sagen?
   b) Kann man die Antwort zur vorhergehenden Teilfrage aus weniger Informationen erschließen?

3. Sei Σ eine erfüllbare, Δ eine nicht erfüllbare Ausdrucksmenge. Ferner sei definiert: $\Delta^{(\neg)} = \{\neg H \mid H \in \Delta\}$. Was lässt sich über die Erfüllbarkeit der folgenden Ausdrucksmengen sagen:

   a) $\Sigma \cap \Delta$ b) $\Delta^{(\neg)}$ c) $\Sigma \cup \{\neg(p \to q) \vee \neg p \vee q\}$?

4. Zeigen Sie, dass aus $\Sigma \models \neg(p \to \neg(q \wedge \neg r))$ garantiert, dass $\Sigma \models \neg r$ gilt und zugleich $\Sigma \cup \{\neg p\}$ nicht erfüllbar ist!

5. Beweisen Sie (mind. 1 Beweis im Annahmesystem und mind. 1 Beweis im Tableau-Kalkül)!
   a) $H_1 \to H_2,\ H_3 \to H_4 \ \vdash H_1 \vee H_3 \to (\neg H_4 \to H_2)$
   b) $\vdash H_1 \leftrightarrow (H_2 \wedge H_1) \vee H_1$
   c) $\forall x(A(x) \to B(x)) \wedge \forall x(A(x) \to C(x)) \to (\neg\forall x\neg A(x) \to \exists x(B(x) \wedge C(x)))$

6. Sei Δ eine erfüllbare Menge prädikatenlogischer Ausdrücke und seien H und G prädikatenlogische Ausdrücke, die keine freien Variablen enthalten. Zeigen Sie, dass dann wenigstens eine der Mengen $\Delta \cup \{H\}$ bzw. $\Delta \cup \{H \to G\}$ konsistent ist. Kann es sein, dass beide Mengen konsistent sind?

7. Erörtern Sie, ob eine „Regel der partiellen Generalisierung“, also

   $$\text{(PG)} \quad \frac{H(x) \to G(x)}{\forall x H(x) \to \exists x G(x)}$$

   als Beweisregel im Hilbert-Kalkül ableitbar ist!

8. Entscheiden Sie, welche der folgenden Ausdrücke allgemeingültig sind:
   a) $\forall x(P(x) \wedge \neg Q(x) \to R(x)) \to (\exists x P(x) \to \neg\forall x(\neg Q(x) \wedge \neg R(x)))$
   b) $\neg\exists x(P(x) \wedge \neg T(x)) \wedge \forall y(S(y) \to T(y)) \to \exists x(P(x) \vee S(x))$.

Z Kann man eine Ausdrucksmenge angeben, die aussagenlogisch nicht inkonsistent, aber prädikatenlogisch inkonsistent ist?
Falls ja - geben Sie ein Beispiel an, falls nein - begründen Sie!