

Blatt 9<sup>1</sup>

abzugeben: Donnerstag, 12.12.19

1. Gegeben sei die Ausdrucksfolge

$$\begin{aligned} &\neg A \rightarrow B \\ &\neg B \rightarrow (\neg A \rightarrow \neg B) \\ &(\neg A \rightarrow B) \rightarrow ((\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow A) \\ &((\neg A \rightarrow B) \rightarrow ((\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow A)) \rightarrow (\neg B \rightarrow ((\neg A \rightarrow B) \rightarrow ((\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow A))) \\ &\neg B \rightarrow ((\neg A \rightarrow B) \rightarrow ((\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow A)) \\ &(\neg B \rightarrow ((\neg A \rightarrow B) \rightarrow ((\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow A))) \rightarrow ((\neg B \rightarrow (\neg A \rightarrow B)) \rightarrow (\neg B \rightarrow ((\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow A))) \\ &(\neg B \rightarrow (\neg A \rightarrow B)) \rightarrow (\neg B \rightarrow ((\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow A)) \\ &(\neg A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow (\neg A \rightarrow B)) \\ &\neg B \rightarrow (\neg A \rightarrow B) \\ &\neg B \rightarrow ((\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow A) \\ &(\neg B \rightarrow ((\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow A)) \rightarrow ((\neg B \rightarrow (\neg A \rightarrow \neg B)) \rightarrow (\neg B \rightarrow A)), \\ &(\neg B \rightarrow (\neg A \rightarrow \neg B)) \rightarrow (\neg B \rightarrow A) \\ &\neg B \rightarrow A \end{aligned}$$

Ergänzen Sie Zeilennummern und Kommentare so, dass es sich erkennbar um eine Ableitung im Hilbertkalkül handelt.

2. Gegeben seien die Prämissen  $P \rightarrow Q$  und  $Q \rightarrow R$  und die Menge von Ausdrücken

$$\{P \rightarrow R, P \rightarrow (Q \rightarrow R), (P \rightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow R), (Q \rightarrow R) \rightarrow (P \rightarrow (Q \rightarrow R)), (P \rightarrow (Q \rightarrow R)) \rightarrow ((P \rightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow R))\}$$

Ordnen Sie diese Menge, geben Sie Zeilennummern und Kommentare an, sodass eine Ableitung aus den beiden Prämissen vorliegt!

3. Konstruieren Sie für nachstehende Behauptungen Ableitungen im Hilbert-Kalkül<sup>2</sup> (beachten Sie die Reihenfolge der Teilaufgaben)

- (a)  $H_1 \vdash H_2 \rightarrow H_1$
- (b)  $\neg A \rightarrow B, \neg B \vdash A$
- (c)  $\neg A \rightarrow B \vdash \neg B \rightarrow A$
- (d)  $\vdash \neg\neg A \rightarrow A$
- (e)  $\vdash (\neg B \rightarrow B) \rightarrow B$

4. Deduktionstheorem

- (a) Warum ist es keine gute Idee, den Beweis des Theorems  $H \rightarrow H$  mittels Deduktionstheorem auf die (triviale) Ableitbarkeit  $H \vdash H$  zurückzuführen?
- (b) Erzeugen Sie unter Nutzung der Verfahren aus dem Beweis des Deduktionstheorems eine Ableitung für  $\neg A \rightarrow \neg B \vdash B \rightarrow A$ .

---

<sup>1</sup>

<sup>2</sup>Es gilt die „2 aus  $x^2$ -Vereinbarung