

Annahmesystem für die Prädikatenlogik

Die Grundidee des Annahmesystems ist für die Aussagenlogik detailliert erläutert. Von dort werden auch die Regeln übernommen - sowohl die Junktoregeln wie auch die Beweisvorschriften. Auch die Festlegungen zur Liberalisierung von Beweisen werden übernommen.

Natürlich gelten die Regeln nunmehr zugleich für prädikatenlogische Instanzen, so ist jetzt natürlich auch

$$\frac{\exists xP(x) \wedge \forall xR(x)}{\forall xR(x)}$$

eine zulässige Instanz der Regel **B** \wedge .

Wirklich neu sind also die Regeln für die Quantoren:

$$\mathbf{B}\forall \quad \frac{\forall xH}{H[x/t]}$$

$$\text{Beispiele:} \quad \frac{\forall xP(x)}{P(a)} \quad \frac{\forall xP(x)}{P(x)} \quad \frac{\forall xP(x)}{P(y)} \quad \frac{\forall x(R(x, y) \rightarrow \exists zQ(z, x))}{R(y, y) \rightarrow \exists zQ(z, y)}$$

Man beachte die (übliche) Einsetzungsbedingung: x möge in H frei sein für t .

$$\mathbf{E}\forall \quad \frac{H(x)}{\forall xH(x)}$$

Entscheidende Bedingung für die Anwendung dieser Regel ist, dass die *Variable* x in den Annahmen des Beweises nicht frei vorkommt.¹

$$\text{Beispiele:} \quad \frac{\exists zP(x, z)}{\forall x\exists zP(x, z)} \quad \frac{\exists xQ(x) \wedge P(z)}{\forall z(\exists xQ(x) \wedge P(z))}$$

Man kann die Regel **E** \forall auch in einer verallgemeinerten Form angeben:

$$\mathbf{E}'\forall \quad \frac{H[x/y]}{\forall xH(x)}$$

Hierbei muss nun x frei für y sein und y darf nicht frei in den Annahmen des Beweises vorkommen.

¹Man kann die Bedingung abschwächen: ... oder nicht von solchen Annahmen abhängig ist, in denen x frei vorkommt.

$$\mathbf{E}\exists \quad \frac{H[x/t]}{\exists x H(x)}$$

$$\text{Beispiele:} \quad \frac{P(a)}{\exists x P(x)} \quad \frac{P(y)}{\exists x P(x)} \quad \frac{\exists y R(x, y)}{\exists x \exists y R(x, y)}$$

$$\mathbf{B}\exists \quad \frac{\exists x H(x)}{H[x/k]}$$

$$\text{Beispiele:} \quad \frac{\exists x P(x)}{P(a)} \quad \frac{\exists x R(x, a)}{R(b, a)} \quad \frac{\exists y Q(x, y)}{Q(x, a_x)}$$

Entscheidend ist hier die Bedingung, dass eine neue, bisher nicht vorkommenden Individuenkonstante k eingesetzt wird. Zudem ist zu beachten, dass diese Konstante mit den in H vorkommenden freien Variablen als Index versehen wird (die Konstante wird parametrisiert)