

VI.3

K. Gödel

*Zum intuitionistischen Aussagenkalkül**

(65) | Für das von A. Heyting¹⁾ aufgestellte System H des intuitionistischen Aussagenkalküls gelten folgende Sätze:

I. *Es gibt keine Realisierung mit endlich vielen Elementen (Wahrheitswerten), für welche die und nur die in H beweisbaren Formeln erfüllt sind (d. h. bei beliebiger Einsetzung ausgezeichnete Werte ergeben).*

II. *Zwischen H und dem System A des gewöhnlichen Aussagenkalküls liegen unendlich viele Systeme, d. h. es gibt eine monoton abnehmende Folge von Systemen, welche sämtlich II umfassen und in A enthalten sind.*

Der Beweis ergibt sich aus folgenden Tatsachen:

Sei F_n die Formel:

$$\sum_{1 \leq i < k \leq n} (a_i \supset \subset a_k),^1]$$

wobei Σ die iterierte $\vee$ -Verknüpfung bedeutet und die a_i Aussagenvariable sind. F_n ist erfüllt für jede Realisierung mit weniger als n Elementen, für welche alle in H beweisbaren Formeln erfüllt sind. Denn bei jeder Einsetzung wird in mindestens einem Summanden von F_n a_i und a_k durch dasselbe Element e ersetzt und $e \supset \subset e \vee b$ ergibt bei beliebigem b einen ausgezeichneten Wert, weil die Formel $a \supset \subset a \vee b$ in H beweisbar ist. Sei ferner S_n die folgende Realisierung:

Elemente: $\{1, 2 \dots n\}$, ausgezeichnetes Element: 1;

$$a \vee b = \min(a, b); a \wedge b = \max(a, b); a \supset b = 1 \text{ für } a \geq b;$$

$$a \supset b = b \text{ für } a < b; \quad \neg a = n, \text{ für } a \neq n, \quad \neg n = 1.$$

(66) Dann sind für S_n sämtliche Formeln aus H und die Formel F_{n+1} sowie alle F_i mit größerem Index erfüllt, dagegen F_n sowie | alle F_i mit kleinerem Index nicht erfüllt. Insbesondere ergibt sich daraus, daß kein F_n in H beweisbar ist. Es gilt übrigens ganz allgemein, daß eine Formel der Gestalt $A \vee B$ in H nur dann beweisbar sein kann, wenn entweder A oder B in H beweisbar ist.

* in: *Anzeiger der Akademie der Wissenschaften in Wien, mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse* 69, [1932], S. 65—66 (Nachdruck).

¹⁾ Vgl. Sitz.-Ber. der Preuß. Akad. d. Wiss. phys.-math. Kl. 1930, II [(VI. 1.)].

¹⁾ Im Original steht das Komma vor der rechten Klammer.