

nicht abgeben!
wird bearbeitet am Freitag, 10.05.19

5. Die Implikationslogik $H_{\Rightarrow}$ nach [Gabbay, 1981]¹

Die Sprache enthält neben Aussagenvariablen ein einziges logisches Grundzeichen: $\Rightarrow$. Das Zeichen $\vdash$ steht für Beweisbarkeit (nunmehr in $H_{\Rightarrow}$), die wie üblich definiert ist.

Sei $H_{\Rightarrow}$ das Axiomensystem, welches durch folgende Postulate bestimmt ist:

Axiom(e):

Axiom ist jeder Ausdruck der Form $A_1 \Rightarrow (A_2 \Rightarrow \dots \Rightarrow (A_n \Rightarrow A) \dots)$, wobei $A \equiv A_i$ für irgendein $1 \leq i \leq n$.

Beweisregel:

$$\text{MP.} \quad \frac{A, A \Rightarrow B}{B}$$

Aufgaben:

1. Man zeige die syntaktische Widerspruchsfreiheit von $H_{\Rightarrow}$, man weise also nach, dass nicht jeder Ausdruck in $H_{\Rightarrow}$ beweisbar ist!
 2. Weisen Sie nach, dass die Regel $\frac{B}{A \Rightarrow B}$
 - a) zulässig
 - b) ableitbar ist.
 3. Zeigen Sie dass die folgenden Ausdrücke in $H_{\Rightarrow}$ nicht beweisbar sind:
 - a) $(A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow C))$
 - b) $((A \Rightarrow B) \Rightarrow A) \Rightarrow A$
 4. Entwerfen Sie einen Tableau-Kalkül für $H_{\Rightarrow}$!
-
5. Man zeige, dass in $H_{\Rightarrow}$ keine eigentlichen Theoreme beweisbar sind, d.h. es gilt $\vdash_{H_{\Rightarrow}} A$ gdw. A Axiom von $H_{\Rightarrow}$ ist.
 6. Man zeige, dass die Regel $\frac{A \Rightarrow (B \Rightarrow C)}{B \Rightarrow (A \Rightarrow C)}$ in $H_{\Rightarrow}$ nicht zulässig ist!

¹ Semantical investigations in Heyting's intuitionistic logic, Reidel, Dordrecht,...