

3. Positive, Minimale und Intuitionistische Aussagenlogik

Abgabetermin: Dienstag, 16.04.19

Axiome:

- A1. $A \rightarrow (B \rightarrow A)$
 A2. $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$
 A3. $A \wedge B \rightarrow A$
 A4. $A \wedge B \rightarrow B$
 A5. $A \rightarrow (B \rightarrow (A \wedge B))$
 A6. $A \rightarrow A \vee B$
 A7. $B \rightarrow A \vee B$
 A8. $(A \rightarrow C) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \vee B \rightarrow C))$
-
- M1. $(A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$
 M2. $\neg(A \wedge \neg A)$
-
- IL. $\neg A \rightarrow (A \rightarrow B)$

Beweis- und Ableitungsregel: MP. $\frac{A, A \rightarrow B}{B}$

Kalküle: Positive (ppL): A1. - A8., MP; Minimale (ML): ppL $\oplus$ M1. - M2.; IAL: ML $\oplus$ IL.

1. Beweisen Sie in ppL:

- a) $\vdash A \rightarrow A$
 b) $B \rightarrow C \vdash (A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)$
 c) $C \rightarrow A, C \rightarrow B \vdash C \rightarrow A \wedge B$

2. Man ergänze die Sprache von ppL um die Aussagenkonstante (den nullstelligen Junktor) $\perp$ und definiere $(\star) \neg H \equiv_{def.} H \rightarrow \perp$. Zeigen Sie, dass in dem so definierten Kalkül M1. und M2. beweisbar sind!

3. Beweisen Sie in ML:

- a) $(H \rightarrow p \wedge \neg p) \rightarrow \neg H$
 b) $\vdash (A \rightarrow \neg B) \rightarrow (B \rightarrow \neg A)$
 c) $\vdash A \rightarrow \neg \neg A$

4. Skizzieren Sie eine Begründung für die Behauptung

$(\star) \not\vdash_{ML} p \wedge \neg p \rightarrow q$

Hier dürfen Sie darauf aufbauen, dass IAL eine echte Kalkülerweiterung von ML ist, speziell darauf, dass das Axiomenschema IL nicht in ML beweisbar ist.