

2. Ein Axiomensystem für die klassische Aussagenlogik [Rosser, 1953]

Grundzeichen der Sprache sind $\&$, $\neg$. $A \supset B$ ist definiert als Abkürzung für $\neg(A \& \neg B)$, A , B , C etc. stehen für beliebige Ausdrücke. Das Zeichen $\vdash$ steht für Beweisbarkeit bzw. Ableitbarkeit. Beweis und Ableitung sind wie üblich definiert.

Axiome:

- A1. $A \supset A \& A$
- A2. $A \& B \supset A$
- A3. $(A \supset B) \supset (\neg(B \& C) \supset \neg(C \& A))$

Beweis- und Ableitungsregel:

$$\text{MP. } \frac{A, A \supset B}{B}$$

1. Man beweise nun mindestens drei der folgenden Behauptungen¹:

- (a) $A \supset B, B \supset C \vdash \neg(\neg C \& A)$
- (b) $\neg(\neg A \& A)$
- (c) $\neg\neg A \supset A$
- (d) $\neg(A \& B) \supset (B \supset \neg A)$
- (e) $A \supset \neg\neg A$
- (f) $(A \supset B) \supset (\neg B \supset \neg A)$
- (g) $\neg A \supset \neg B \vdash B \supset A$
- (h) $A \supset B \vdash C \& A \supset B \& C$
- (i) $A \supset B, B \supset C, C \supset D \vdash A \supset D$
- (j) $A \supset A$
- (k) $A \& B \supset B \& A$
- (l) $A \supset B, B \supset C \vdash A \supset C$
- (m) $A \supset B, C \supset D \vdash A \& C \supset B \& D$
- (n) $B \supset C \vdash A \& B \supset A \& C$
- (o) $(A \supset (B \supset C)) \supset (A \& B \supset C)$
- (p) $(A \& B \supset C) \supset (A \supset (B \supset C))$
- (q) $A \supset B, A \supset (B \supset C) \vdash A \supset C$
- (r) $A \supset (B \supset A \& B)$
- (s) $A \supset (B \supset A)$
- (t) Wenn $\Gamma, A \vdash B$, so auch $\Gamma \vdash A \supset B$
- (u) $(\neg A \supset A) \supset A$
- (v) $A \supset B, \neg A \supset B \vdash B$

2. Skizzieren Sie einen Beweisaufbau für den Adäquatheitssatz für obigen Kalkül.

3. Zeigen Sie, dass $\Gamma \subseteq C_+(\Delta)$ gdw. $C_+(\Gamma) \subseteq C_+(\Delta)$.

¹ Aufgaben nach Elliot Mendelson [Mendelson, 1971]. Beachten Sie die Reihenfolge der Aufgaben. Sie dürfen (und sollten) bei den Beweisen und Ableitungen davon Gebrauch machen, dass die vorhergehenden Aufgaben gelöst sind. Das heißt aber auch, dass Sie das Deduktionstheorem erst bei den Aufgaben (u) und (v) verwenden dürfen.