

Konsequenzrelationen II

wird besprochen am Freitag, 05.07.2019

Gegeben sei eine formale Sprache, $\mathcal{L}$. Seien $A, B, \dots$ Zeichen für Ausdrücke dieser Sprache, Seien $\Gamma, \Delta, \dots$ Zeichen für *endliche, nichtleere* Ausdrucksmengen.

Wir betrachten eine Funktion $\|\cdot\|$, die Ausdrücken der Sprache jeweils einen Wert $\alpha \in \mathcal{W}$ zuordnet. Wie viele Werte zulässig sind, welcher Art diese Werte sind usw. ist nebensächlich, vorausgesetzt sei lediglich, dass die Werte linear geordnet sind.¹

Wir bezeichnen mit $\min(\Gamma)$ das Minimum der Werte der Ausdrücke aus Γ bei einer fixierten Funktion $\|\cdot\|$, also $\min(\Gamma) = \min(\|H\| \mid H \in \Gamma)$.

Ganz analog bestimmt man $\max(\Gamma)$. Natürlich sind diese Definitionen stets abhängig von der gewählten Funktion, diese möge künftig beliebig, aber fix sein.

Schließlich wird eine Relation $\triangleright$ zwischen endlichen Ausdrucksmengen definiert:

$$\Gamma \triangleright \Delta \quad \text{gdw.} \quad \min(\Gamma) \leq \max(\Delta) .$$

Lemma 1 Für beliebige Γ, Δ und jede Bewertungsfunktion $\|\cdot\|$ (jedes $\triangleright$) gilt

- (1) Wenn $\Gamma \triangleright \Delta$ so $\Gamma \cup \Gamma' \triangleright \Delta \cup \Delta'$
- (2) Wenn $A \in \Gamma$ so $\Gamma \triangleright \{A\}$
- (3) $\Gamma \triangleright \Gamma$
- (4) Wenn $\Gamma \triangleright \Delta \cup \{A\}$ und $\{A\} \cup \Lambda \triangleright \Theta$, so $\Gamma \cup \Lambda \triangleright \Delta \cup \Theta$

Offensichtlich haben wir hier sehr allgemeine (und sehr schwache Voraussetzungen) bezüglich der Bewertungsfunktion $\|\cdot\|$ gemacht. Die Anzahl der Werte, wie auch die Frage, ob sie ganzzahlig, rational oder reell sein sollen, war völlig unwichtig, wenn nur eine lineare Ordnung auf der Wertemenge gegeben ist.

Spannend ist die Frage, welchen „Randbedingungen“ eine solche Bewertungsfunktion genügen muss, damit - falls die Sprache eine „Konjunktion“ ($\wedge$) enthält - für diesen Junktor die üblichen Regeln für $\wedge$ gelten.

Natürlich muss man sich im allgemeinen Fall zunächst einigen, was denn die „üblichen Regeln“ seien; hier mögen diese (ausgedrückt in $\triangleright$) lauten:

$$[\text{KI}] \quad A, B \triangleright A \wedge B, \quad [\text{KE1}] \quad A \wedge B \triangleright A, \quad [\text{KE2}] \quad A \wedge B \triangleright B .$$

Dann gilt folgender

Satz 2 Die $\triangleright$ -Regeln [KI], [KE1] und [KE2] gelten genau dann, wenn die Bewertungsfunktion $\|\cdot\|$ der Bedingung

$$\|A \wedge B\| = \min(\|A\|, \|B\|) \tag{*}$$

genügt.

Beweisen Sie Lemma 1 und Satz 2!

¹ Eine genaue Analyse der Beweise zeigt, dass Linearität nicht unbedingt vorausgesetzt werden muss, es genügt, dass für beliebige Werte α, β stets $\min(\alpha, \beta)$ definiert ist.