Konsequenzrelationen I¹

wird besprochen am Freitag, 21.06.2019

1. Beweisen Sie die nachfolgende Behauptung!

Sei $\Vdash$ eine Scottsche Konsequenzrelation und seien Δ, Θ Ausdrucksmengen mit $\Delta \not\vdash \Theta$. Man definiert nun $\Vdash^*$:

$$\phi \Vdash^* \psi \text{ gdw. } \Delta, \phi \Vdash \Theta, \psi$$

Dann ist $\Vdash^*$ eine Scottsche Konsequenzrelation.

2. Zeigen Sie:

Sei $\Vdash$ Scottsche Konsequenzrelation. Sei ferner für $\overline{\psi} = 1$ definiert

$$\phi \vdash \psi \text{ gdw.}_{(\text{Def.})} \phi \Vdash \overline{\psi}.$$

Dann ist $\vdash$ Tarskische Konsequenzrelation.

3. Weisen Sie nach, dass die Schnittregel für Konsequenzrelationen gleichwertig formuliert werden kann

- a) Für die Konsequenzrelation nach Tarski:

Gelten $\phi, C \vdash A$ und $\phi_1 \vdash C$, so auch $\phi, \phi_1 \vdash A$

- b) Für die Konsequenzrelation nach Scott:

Gelten $\phi, C \Vdash \psi$ und $\phi_1 \Vdash C, \psi_1$, so auch $\phi, \phi_1 \Vdash \psi, \psi_1$

4. Beweisen Sie folgenden Behauptungen über den Zusammenhang zwischen Konsequenzrelation und Konsequenzoperator

- a) Sei C Konsequenzoperator², und sei eine Relation $\vdash$ definiert mit

$$\phi \vdash A \text{ gdw. } A \in C(\phi).$$

Dann ist die so definierte Relation eine Tarskische Konsequenzrelation.

- b) Sei C Konsequenzoperator, und sei eine Relation $\Vdash$ definiert mit

$$\phi \Vdash \psi \text{ gdw. } A \in C(\phi) \text{ für wenigstens ein } A \in \psi.$$

Dann ist die so definierte Relation eine Scottsche Konsequenzrelation.

¹ Aufgaben 1 und 2 nach (Gabbay [1981])

² für beliebige Formelmengen X, Y gilt also

(a) $X \subseteq C(X)$; (b) Wenn $X \subseteq Y$, so $C(X) \subseteq C(Y)$; (c) $C(C(X)) = C(X)$

zu Aufgabe 1:

- a) Wegen $\phi \Vdash \phi$ und der Monotonie gilt stets $\Delta, \phi \Vdash \Theta, \phi$, mithin $\phi \Vdash^* \phi$.
- b) Gelte $\phi \Vdash^* \psi$, also $\Delta, \phi \Vdash \Theta, \psi$, dann gilt wegen der Monotonie von $\Vdash$ auch $\Delta, \phi, \phi_1 \Vdash \Theta, \psi, \psi_1$. Das aber ist gleichbedeutend mit $\phi, \phi_1 \Vdash^* \psi, \psi_1$.
- c) Seien $\phi, A \Vdash^* \psi$, und $\phi, \Vdash^* \psi, A$ gegeben. Dann gilt (nach Def. von $\Vdash^*$) $\phi, \Delta \Vdash \psi, A, \Theta$ und $\phi, A, \Delta \Vdash \psi, \Theta$, also nach Schnitt $\phi, \Delta \Vdash \psi, \Theta$, somit $\phi \Vdash^* \psi$.

zu Aufgabe 2:

- a) Wegen $\{A\} \Vdash \{A\}$ gilt nach Definition von $\vdash$: $A \vdash A$.
- b) Gelte $\phi \vdash A$, damit auch $\phi \Vdash \{A\}$, dann gilt (wegen der Monotonie von $\Vdash$) auch $\phi \cup \phi_1 \Vdash \{A\}$. Das aber ist gleichbedeutend mit $\phi, \phi_1 \vdash A$.
- c) Gelten nun $\phi, C \vdash A$ und $\phi \vdash C$. Dann gilt (nach Def. von $\vdash$) $\phi, C \Vdash A$ und $\phi, \phi_1 \vdash C$, also nach Schnitt $\phi \Vdash A$, somit $\phi \vdash A$.

zu Aufgabe 3:

In beiden Fällen gilt, dass die herkömmliche Schnittregel Spezialfall der neu formulierten ist, in diesem Fall also weiterhin gilt. Dass die neu formulierte Schnittregel jeweils schon aus der herkömmlichen bewiesen werden kann, sei exemplarisch für Teilaufgabe a) gezeigt. Gelte also $\phi, C \vdash A$ und $\phi_1 \vdash C$. Dann kann man (nach Monotonie) auf $\phi, \phi_1, C \vdash A$ und $\phi, \phi_1 \vdash C$ schließen und nun die herkömmliche Schnittregel anwenden: $\phi, \phi_1 \vdash A$.

zu Aufgabe 4a:

Hier erweist sich ein Hilfssatz über Konsequenzoperatoren als sehr nützlich:

($\star$) Ist $B \in C(\phi)$, so gilt $C(\phi) = C(\phi \cup \{B\})$.³

Dies ist leicht bewiesen: Ist $B \in C(\phi)$, so ist wegen $\phi \subseteq C(\phi)$ auch $\phi \cup \{B\} \subseteq C(\phi)$. Dann gilt (wegen der Monotonie und Idempotenz von C) $C(\phi \cup \{B\}) \subseteq C(C(\phi)) = C(\phi)$.

Damit ist der Hilfssatz bewiesen.

Zunächst ist $\{A\} \subseteq C(\{A\})$, also $A \in C(\{A\})$, somit $\{A\} \vdash A$. Damit ist schon eine Charakteristik von T.c.r. bewiesen.

Sei nun $\phi \vdash A$, also $A \in C(\phi)$. Wegen der Monotonie von C gilt $A \in C(\phi) \subseteq C(\phi \cup \phi')$, mithin $\phi \cup \phi' \vdash A$.

Seien $\phi, B \vdash A$ und $\phi \vdash B$. Wir haben zu zeigen, dass $\phi \vdash A$ (Schnittregel für $\vdash$). Wegen $\phi \vdash B$ gilt $B \in C(\phi)$ und damit nach dem Hilfssatz ($\star$) $C(\phi) = C(\phi \cup \{B\})$. Andererseits gilt $\phi, B \vdash A$, d.h. $A \in C(\phi \cup \{B\}) = C(\phi)$. Mithin $\phi \vdash A$, q.e.d.

³ Die Umkehrung dieses Hilfssatzes gilt selbstverständlich auch (und ist trivial).

zu Aufgabe 5:

($\Rightarrow$): Sei C Konsequenzoperator im Sinne der herkömmlichen Definition. Dann gilt

($\star$) $X \subseteq C(Y) \Leftrightarrow C(X) \subseteq C(Y)$.

Aus $X \subseteq C(Y)$ folgt nach Monotonie $C(X) \subseteq C(C(Y))$ und somit (wegen Idempotenz auch $C(X) \subseteq C(Y)$).

Umgekehrt, aus $C(X) \subseteq C(Y)$ ergibt sich gemäß Extensivität ($X \subseteq C(X)$) unmittelbar $X \subseteq C(Y)$.

($\Leftarrow$): Genüge nun ein Operator C der Bedingung ($\star$). Dann zeigt man, dass dieser Operator extensiv, monoton und idempotent ist.

(a) Aus $C(X) \subseteq C(X)$ folgt gemäß ($\star$) unmittelbar $X \subseteq C(X)$.

(b) Falls $X \subseteq Y$, so ist gemäß (a) auch $Y \subseteq C(Y)$, also $X \subseteq C(Y)$. Dann gilt nach ($\star$) sofort $C(X) \subseteq C(Y)$.

(c) $C(X) \subseteq C(C(X))$ folgt unmittelbar aus (a). Zudem erhält man aus $C(X) \subseteq C(X)$ durch Berücksichtigung von ($\star$) sofort $C(C(X)) \subseteq C(X)$.