1. Die Implikationslogik $H_{\Rightarrow}$ nach [Gabbay, 1981][1]

Einziges logisches Grundzeichen der Sprache ist $\Rightarrow$. Das Zeichen $\vdash$ steht für Beweisbarkeit, die wie üblich definiert ist.

Sei $H_{\Rightarrow}$ das Axiomensystem, welches durch folgende Postulate bestimmt ist:

Axiom(e):

Axiom ist jeder Ausdruck der Form $A_1 \Rightarrow (A_2 \Rightarrow \cdots \Rightarrow (A_n \Rightarrow A) \cdots)$,
wobei $A \equiv A_i$ für irgendein $1 \leq i \leq n$.

Beweisregel:

MP. $\dfrac{A,\ A \Rightarrow B}{B}$

Aufgaben:

1. Man zeige die syntaktische Widerspruchsfreiheit von $H_{\Rightarrow}$, man weise also nach, dass nicht jeder Ausdruck in $H_{\Rightarrow}$ beweisbar ist!
2. Weisen Sie nach, dass die Regel $\dfrac{B}{A \Rightarrow B}$
   a) zulässig b) ableitbar ist.
3. Zeigen Sie dass die folgenden Ausdrücke in $H_{\Rightarrow}$ nicht beweisbar sind:
   a) $(A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow C))$
   b) $((A \Rightarrow B) \Rightarrow A) \Rightarrow A$
   c) $A \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow B)$

   Stützen Sie sich hierbei ggf. auf die Lösung von Aufgabe 5.
4. Zeigen Sie, dass die Menge der Theoreme von $H_{\Rightarrow}$ (ersetzt man $\Rightarrow$ durch $\rightarrow$) Teilmenge der Theoreme der klassischen Aussagenlogik ist
5. Man zeige, dass in $H_{\Rightarrow}$ keine eigentlichen Theoreme beweisbar sind, d.h. es gilt $\vdash_{H_{\Rightarrow}} A$ gdw. A Axiom von $H_{\Rightarrow}$ ist.
6. *Man zeige, dass die Regel $\dfrac{A \Rightarrow (B \Rightarrow C)}{B \Rightarrow (A \Rightarrow C)}$ in $H_{\Rightarrow}$ nicht zulässig ist! ENDE

---

7. Entwerfen Sie einen Tableau-Kalkül für $H_{\Rightarrow}$!
8. Sei $\Vdash$ die kleinste Scottsche Konsequenzrelation für die Sprache, die abgeschlossen ist bezüglich der Bedingung
   D: Wenn $\phi \cup \{A\} \Vdash \{B\}$, so $\phi \Vdash \{A \Rightarrow B\}$.
   Dann gilt: Wenn $\vdash_{H_{\Rightarrow}} A$ so $\emptyset \Vdash \{A\}$. [2]

[1] Semantical investigations in Heyting's intuitionistic logic, Reidel, Dordrecht,...
[2] W. Pogorzelski, 1974; eigentlich wird die Äquivalenz beider Behauptungen bewiesen, s.a. Abschnitt Konsequenzrelationen