NKL: INTUITIONISTISCHE (AUSSAGEN-)LOGIK

PETER STEINACKER*

INHALTSVERZEICHNIS

HINWEIS

Die nachfolgenden Seiten enthalten Auszüge aus einem Skript zur Nichtklassischen Logik. Sie sind gedacht als Ergänzung des Materials der Vorlesung „Darstellungsformen der Logik". Die Auswahl der Schwerpunkte ist durch den Kurs DarF vorgegeben: Alles was dort benötigt, aber nicht speziell aufgeführt wird, soll hier kurz dargestellt werden. Auf der anderen Seite sind spezielle Kalkülformen der intuitionistischen Logik, sofern sie im Kurs DarF behandelt werden, hier ausgelassen. Insofern ist dieser Text in zweifacher Hinsicht fragmentarisch.
Keinesfalls ist dieser Text als eigenständige kurze Einführung in die intuitionistische Logik anzusehen.
Eine relativ neue Darstellung findet man in Grigori Mints: A Short Introduction to Intuitionistic Logic Springer 2006, lesenswert der Eintrag in der Stanford Encyclopedia. Nützlich ist auch der englischsprachige Wikipedia-Eintrag:
https://en.wikipedia.org/wiki/Intuitionistic_logic.
Alle anderen hier angeführten Aufsätze findet man (teilweise in gekürzter Fassung) in K. Berka & L. Kreiser: Logik-Texte. Kommentierte Auswahl zur Geschichte der modernen Logik, Akademie-Verlag.

* *Leipzig - theo.rem@mailbox.org*

1 HISTORISCHES: BROUWERS ANSATZ

Die sogenannte dritte Grundlagenkrise der Mathematik löste verschiedene Initiativen aus, eine neue Grundlegung der Mathematik zu initiieren. Unter diesen Grundsatzprogrammen findet sich, neben Formalismus und Logizismus, auch der Intuitionismus [L.E.J. Brouwer].

> 1908 veröffentlichte Brouwer den Artikel *De onbetrouwbaarheid der logische principes* (dt. Die Unverlässlichkeit der logischen Prinzipien), wo er erstmals deutlich die Ablehnung des principium exclusii tertii formulierte. Er identifizierte dieses Prinzip auch mit dem Problem der Lösbarkeit eines jeden mathematischen Problems, was das Ziel des vom deutschen Mathematiker David Hilbert formulierten Programms gewesen war.[1]

Brouwers Hauptthesen

> ... behauptete der Intuitionismus, dass die mathematischen Gegenstände mehr seien als bloße Zeichen. Allerdings verortete er die Gegenstände nicht in einer vom Menschen unabhängigen Seinssphäre wie der Platonismus, sondern sagte, sie existierten ausschließlich im menschlichen Geist, in der „Intuition", sobald diese sie erzeugt. Die geistige Erzeugung sei keinesfalls eine sprachliche, und somit auch keine auf Logik reduzierbare. Die sprachlichen Zeichen und die logische Symbolik seien lediglich als Repräsentanten der geistigen Gegenstände gerechtfertigt. Die formalistische Auffassung kritisierte der Intuitionismus als leeres Spiel von Zeichen, welche häufig gar keine mathematischen Gegenstände bzw. keine geistigen Operationen repräsentierten. Insbesondere die „Gegenstände" der transfiniten Mengenlehre, also unendliche Mengen, gelten ihm als verdächtig, er neigt bezüglich des Unendlichen mehr zur Auffassung der potentiellen als der der aktualen Unendlichkeit. Während dies eine eher philosophische Frage ist, hatte die Kritik am logischen Satz vom ausgeschlossenen Dritten, der laut Intuitionismus keine Entsprechung im geistigen Operieren hat und somit ungerechtfertigt ist, drastische Auswirkungen auf die Mathematik, da es sich bei ihm um ein wichtiges Beweisprinzip handelt. Der Hauptvertreter des Intuitionismus L.E.J. Brouwer entwickelte darum eine Mengenlehre unabhängig vom Satz vom ausgeschlossenen Dritten, und stellte diese in mehreren Aufsätzen ab 1918 der Öffentlichkeit vor. Da diese Ausarbeitungen des intuitionistischen Grundlegungsversuchs sehr technisch gehalten waren und daher praktisch keine Wirkung erzielen konnten, müssen als Gründe dafür, dass um den Intuitionismus ein Grundlagenstreit entbrannte, die charismatische und polarisierende Persönlichkeit Brouwers und die Tatsache herangezogen werden, dass in den ersten Jahren nach dem Weltkrieg die mathematische Öffentlichkeit einer formalistischen Auffassung der Mathematik mehrheitlich ablehnend gegenüberstand.[2]

Es war eine ideologisch aufgeladene, polarisierende Betrachtungsweise, die den Anstoß für die Ausarbeitung einer eigenständigen, der *intuitionistischen Logik*, bildete [Heyting 1930][3].

---

1 „Luitzen Egbertus Jan Brouwer". In: Wikipedia, Die freie Enzyklopädie. Bearbeitungsstand: 16. März 2011, 18:51 UTC. URL: http://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Luitzen Egbertus Jan Brouwer &oldid=86540273 (Abgerufen: 4. April 2011, 19:30 UTC)

2 „Grundlagenkrise der Mathematik". In: Wikipedia, Die freie Enzyklopädie. Bearbeitungsstand: 2. März 2011, 00:09 UTC. URL: http://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Grundlagenkrise der Mathematik &oldid=85936228 (Abgerufen: 4. April 2011, 19:43 UTC)

3 Nicht nur eine eigenständige Logik, auch eine den Prinzipien des Intuitionismus verpflichtete Mathematik wurde in großen Teilen ausgearbeitet.

Man beachte jedoch, dass Heyting[4] selbst darauf verwies, dass seine Darstellung der intuitionistischen Mathematik nicht wirklich gerecht werden könne [Heyting 1930, 42]. Das von ihm entworfene formale System aber hat sich als intuitionistische Logik etabliert und spielt in der Logik insgesamt eine wichtige Rolle. Der Streit um die richtige Fundierung der Mathematik dagegen zählt heute zu den Fußnoten der Mathematikgeschichte und ist für die aktuelle Entwicklung der Mathematik kaum noch von Bedeutung.

2 HEYTINGS KALKÜL

Begonnen sei mit einem axiomatischen System für die intuitionistische Aussagenlogik, wobei es sich hier nicht um den Originalkalkül[5] von Heyting handelt:

INT als Hilbert-Kalkül:

Junktoren von $\mathcal{L}$: $\supset, \cap, \cup, \sim$; dazu die übliche Ausdrucksdefinition

Axiome:

$A \supset (B \supset A)$
$(A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$

$A \cap B \supset A$
$A \cap B \supset B$
$A \supset (B \supset (A \cap B))$

$A \supset (A \cup B)$
$B \supset (A \cup B)$
$(A \supset C) \supset ((B \supset C) \supset ((A \cup B) \supset C))$

$(A \supset B) \supset ((A \supset \sim B) \supset \sim A)$
$\sim A \supset (A \supset B)$

Regel(n):

(MP) $\dfrac{A \supset B,\ A}{B}$

Beweis und Ableitung werden wie üblich definiert. Ist ein Ausdruck H in diesem Kalkül beweisbar, so schreibt man $\vdash_{\mathsf{INT}} H$.
Hier einige Beispiele für Beweise bzw. Ableitungen in INT:

$\vdash_{\mathsf{INT}} (A \supset \sim A) \supset \sim A$

1)	$(A \supset A) \supset ((A \supset \sim A) \supset \sim A)$	Axiom
2)	$A \supset A$	Theorem (Beweis analog zu KAL)
3)	$(A \supset \sim A) \supset \sim A$	1,2 MP

$A \supset B \vdash_{\mathsf{INT}} (C \supset A) \supset (C \supset B)$

1) $A \supset B$
2) $(A \supset B) \supset (C \supset (A \supset B))$
4) $C \supset (A \supset B)$
5) $(C \supset (A \supset B)) \supset ((C \supset A) \supset (C \supset B))$
6) $(C \supset A) \supset (C \supset B)$

$\vdash_{\mathsf{INT}} (A \supset \sim B) \supset (B \supset \sim A)$

4 Arend Heyting (09. 05. 1898 Amsterdam - 09. 07. 1980 Lugano)
5 vgl. hierzu Heyting 1930

1) $(A \supset B) \supset ((A \supset\sim B) \supset\sim A)$
2) $B \supset (A \supset B)$
3) $B \supset ((A \supset\sim B) \supset\sim A)$
4) $(A \supset\sim B) \supset (B \supset\sim A)$

Setzt man im zuletzt bewiesenen Theoremschema für $\sim A$ für A und A für B, so erhält man unmittelbar das Theoremschema $\vdash_{INT} A \supset\sim\sim A$.

In den obenstehenden Beweisen wurden Regeln wie Kettenschluss, Prämissenvertauschung und die Beweisbarkeit von $A \supset A$ vorausgesetzt, natürlich unter dem Vorbehalt, dass diese Regeln und das Theorem auch wirklich in INT beweisbar sind.

Anmerkung 1. Was auffällt, ist eine große Ähnlichkeit der beweisbaren Ausdrücke zu aussagenlogischen Tautologien. Und in der Tat, versteht man die logischen Zeichen als Ausdruck klassischer Junktoren (oder übersetzt man sie in diese), so sind alle aufgelisteten Ausdrücke Entsprechungen von Tautologien. Und da die einzige Regel, der MP, stets von Tautologien zu Tautologien führt, kann man (etwas grob verallgemeinernd) festhalten:

Satz 2. *Jeder intuitionistisch beweisbare Ausdruck ist auch klassisch beweisbar, also:* $\vdash_{INT} H \Rightarrow \vdash_{KAL} H$.

Damit erweist sich die intuitionistische Aussagenlogik in einem gewissen Sinn als Teilkalkül der klassischen Aussagenlogik.[6] Dass die intuitionistische Logik nicht mit der klassischen zusammenfällt, also ein echter Teilkalkül ist, bleibt zu zeigen. Dazu reicht es jedoch aus, wenn man für eine klassische Tautologie zeigt, dass deren intuitionistisches Pendant nicht in INT beweisbar ist. Dies soll hier für den Ausdruck $p \cup \sim p$ erfolgen.

Zum Nachweis der Nichtbeweisbarkeit von $p \cup \sim p$ verwendet man nun folgende Wertezuordnungen[7]:

$\supset$	0	1	2
0	0	1	2
1	0	0	0
2	0	1	0

$\cap$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	1	1
2	2	1	2

$\cup$	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	2

$\sim$	
0	1
1	0
2	1

Man kann leicht zeigen, dass alle Axiome von INT bei beliebiger Belegung stets den Wert 0 annehmen und dass der MP diese Eigenschaft von den Prämissen auf die Konklusion überträgt. Was jedoch den Ausdruck $p \cup \sim p$ angeht, so betrachte man die letzte Zeile der nachfolgenden Wertetafel:

p	$\sim p$	$p \cup \sim p$
0	1	0
1	0	0
2	1	2

p	$\sim p$	$\sim\sim p$	$\sim\sim p \supset p$
0	1	0	0
1	0	1	0
2	1	0	2

Diese Tafeln weisen zugleich die Nichtbeweisbarkeit von $\sim\sim p \supset p$ nach, nicht aber die von $(A \supset B) \cup (B \supset A)$.

6 Dies unter der Voraussetzung, dass man eine Übersetzung vornimmt, die die intuitionistischen Junktoren stillschweigend in die klassischen überführt.
7 vgl. Heyting 1930: Die formalen Regeln ...

p	q	$p \supset q$	$q \supset p$	$(p \supset q) \cup (q \supset p)$
0	0	0	0	0
0	1	1	0	0
0	2	2	0	0
1	0	0	1	0
1	1	0	0	0
1	2	0	1	0
2	0	0	2	0
2	1	1	0	0
2	2	0	0	0

Dennoch ist festzuhalten, dass $\nvdash_{\mathsf{INT}} (p \supset q) \cup (q \supset p)$, wie Mit anderen Wertefunktionen gezeigt werden kann.
Die letzte Feststellung zeigt noch einmal die Nichtadäquatheit der gewählten Wertefunktionen.
Es gilt nun folgender Zusammenhang mit der klassischen Logik: Ersetzt man das letzte Axiom $\sim A \supset (A \supset B)$ durch $\sim\sim A \supset A$, so erhält man eine adäquate Axiomatisierung der KAL (in der, das sei am Rande vermerkt, $\sim A \supset (A \supset B)$ beweisbar ist).

Oberflächlich betrachtet, ist also INT ein Teilkalkül von KAL: Alles was in INT beweisbar ist, ist auch in KAL beweisbar, aber nicht umgekehrt.
Aber genau genommen, haben wir verschiedene (formale) Sprachen, welche ineinander übersetzt werden müssen (also eine durch eine andere interpretiert werden).
Was sind die augenfälligsten Besonderheiten von INT? Neben $\sim\sim A \supset A$ ist auch das tertium non datur (tnd) $A \cup \sim A$ nicht beweisbar. Es gelten nicht mehr alle DeMorganschen Gesetze, das Kontrapositionsgesetz in der Form $(\sim A \supset \sim B) \supset (B \supset A)$ gilt nicht mehr, und auch $(A \supset B) \cup (B \supset A)$ ist in INT nicht beweisbar.

Damit „wackeln" indirekte Beweise und jeder Beweis, der sich auf das tertium non datur stützt. Selbst in der Prädikatenlogik wirkt sich die Modifikation aus: Die Quantoren sind nicht mehr einer durch den anderen definierbar. Dies ist übrigens ganz im Sinne Brouwers, der verlangte, dass Existenzbeweise stets konstruktiv sein sollen und nicht indirekt erbracht werden können (In der klassischen Mathematik beweist man $\exists xH$ auch so: Die Annahme von $\forall x \neg H$ führt zu einem Widerspruch, also gilt $\neg\forall x \neg H$). Dies soll in einer intuitionistischen Mathematik ausgeschlossen sein, was sich in der intuitionistischen Prädikatenlogik entsprechend widerspiegelt. Klar ist, dass die bisherige zweiwertige wahrheitsfunktionale Semantik nicht mehr angemessen ist. Um eine Annäherung an ein inhaltliches Verständnis des formalen Systems zu ermöglichen, sei hier eine informelle Semantik skizziert:

3 KOLMOGOROWS AUFGABENRECHNUNG

Die Interpretation Kolmogorows[8] findet man im Aufsatz *Zur Deutung der intuitionistischen Logik* (1932) in den Logik-Texten[9] oder auch online.[10] Brouwer und Heyting standen dieser Lesart sehr aufgeschlossen gegenüber, deshalb ist auch die Bezeichnung BHK-Interpretation gebräuchlich.
Es stehen nun p, $q, \ldots$ nicht mehr für Aussagesätze, sondern für (mathematische) Aufgaben. Die Junktoren seien jetzt Aufgabenverknüpfungen:

$p \cap q$ bezeichne die Aufgabe, die Aufgabe p und die Aufgabe q zu lösen,
$p \cup q$ bezeichne die Aufgabe, die Aufgabe p oder die Aufgabe q zu lösen (wenigstens eine),
$p \supset q$ bezeichne die Aufgabe, die Lösung der Aufgabe q und die Lösung der Aufgabe p zurückzuführen,
$\sim p$ bezeichne die Aufgabe, vorausgesetzt, dass die Lösung von p gegeben ist, einen Widerspruch zu erhalten.

Ganz offensichtlich gibt es in dieser Lesart generell lösbare Aufgaben, etwa

$$A \cap B \supset A$$

wobei hier A und B für Aufgaben beliebiger Komplexität stehen. Gekennzeichnet werden solche mittels $\vdash$. Zu diesen zählen die Axiome von Heytings Kalkül[11]. Die Regel MP überträgt wieder diese Eigenschaft von den Prämissen auf die Konklusion, ist also auch in dieser Lesart gerechtfertigt.
Zugleich halten wir fest: Die Ausdrücke

$$p \cup \sim p \quad \text{und} \quad (p \supset q) \cup (q \supset p)$$

zählen nicht zu den generell lösbaren Aufgaben. Letzteres ist ganz offensichtlich einzusehen, aber auch für $p \cup \sim p$ wäre es problematisch anzunehmen, dass für jede Aufgabe p entweder diese gelöst werden oder aber gezeigt werden könne, dass die Annahme einer Lösung in einem Widerspruch resultiert.
Kolmogorov liefert also eine ganz plausible Interpretation für die Verwerfung bestimmter klassisch gültiger Ausdrücke, die zugleich eine ziemlich plausible Rechtfertigung für intuitionistisch gültige Ausdrücke ist.
Graduell weniger überzeugend ist diese Interpretation im Fall eines bestimmten Axioms, nämlich $\sim A \supset (A \supset B)$, also genau jenes Axioms, welches den Übergang von der minimalen zur intuitionistischen Aussagenlogik realisiert.
Die Frage nach der Adäquatheit der Kolmogorowschen Interpretation erübrigt sich, denn deren Erörterung setzt voraus, dass man mit der Aufgabeninterpretation in dem Sinne „rechnen“ kann, dass man unzweifelhaft über die generelle Lösbarkeit komplexer Aufgaben befinden kann – eine Erwartung, die sich nur schwer einlösen lässt.

---

8 Andrei N. Kolmogorow (25. 04. 1903 Tambow - 20. 10 1987 Moskau)
9 Berka/Kreiser: Logik Texte
10 http://gdz.sub.uni-goettingen.de/dms/load/img/?PPN=GDZPPN002373467
11 Die Interpretation für das Axiom $\sim A \supset (A \supset B$ ist dabei etwas eigentümlich. Interessant ist, dass durch Streichung dieses Axioms aus dem eingangs angeführten Liste eine Axiomatisierung von Johanssons Minimale Logik entsteht.

4 DIE SÄTZE VON GLIVENKO

Die Sätze von Glivenko[12] stellen eine noch engere Verbindung zwischen klassischer und intuitionistischer Aussagenlogik dar.

Doch bevor diese formuliert und bewiesen werden, sei eine Übersetzung definiert, denn erst diese (oder eine ähnliche) erlauben es, die nachfolgenden Behauptungen sinnvoll in einen Kontext einzufügen ohne unnötig Verwirrung zu stiften:
Es sei Tr ein Übersetzungsoperator, der aus der Sprache der klassischen Aussagenlogik in die Sprache der intuitionistischen Aussagenlogik übersetzt und der wie folgt induktiv definiert ist:

Definition 1.

$$\begin{aligned}
\mathrm{Tr}(\alpha) &\equiv \alpha \\
\mathrm{Tr}(\neg H_1) &\equiv \sim \mathrm{Tr}(H_1) \\
\mathrm{Tr}(H_1 \wedge H_2) &\equiv \mathrm{Tr}(H_1) \cap \mathrm{Tr}(H_2) \\
\mathrm{Tr}(H_1 \vee H_2) &\equiv \mathrm{Tr}(H_1) \cup \mathrm{Tr}(H_2) \\
\mathrm{Tr}(H_1 \to H_2) &\equiv \mathrm{Tr}(H_1) \supset \mathrm{Tr}(H_2)
\end{aligned}$$

Es handelt sich hier um eine banale Übersetzung (es werden einfach die klassischen Junktoren durch die gleichnamigen intuitionistischen ersetzt). Analog und ähnlich einfach definiert man Tr^{-1}, die Übersetzung, die die intuitionistischen Junktoren durch gleichnamige klassische ersetzt.

Satz 3 (Glivenko)**.**

$$\vdash_{KAL} H \quad \Leftrightarrow \quad \vdash_{IAL} \sim\sim \mathrm{Tr}(H)$$

„Übergeht" man den Übersetzungsoperator großzügig, so kann man formulieren: Ein aussagenlogischer Ausdruck H ist genau dann klassische beweisbar, wenn seine doppelte Negation intuitionistisch beweisbar ist. Eine Richtung der Behauptung ist offensichtlich und bedarf keines förmlichen Beweises: Ist $\sim\sim H$ intuitionistisch beweisbar, so auch klassisch (da alle intuitionistischen Axiome klassisch beweisbar sind und der MP fortbesteht), dann ist aber auch $\neg\neg H$ klassisch beweisbar und damit auch H. Weniger offensichtlich ist die Umkehrung, die als konstruktiver Beweis per Induktion über die Länge des Beweises von H in KAL geführt wird.

Aus dem Satz von Glivenko ergeben sich einige wichtige Schlussfolgerungen:[13]

Folgerung 4.

$$\Gamma \vdash_{KAL} H \quad \Leftrightarrow \quad \sim\sim \mathrm{Tr}(\Gamma) \vdash_{IAL} \sim\sim \mathrm{Tr}(H)$$

Da für KAL wie IAl ein Endlichkeitsssatz und TD gelten, ergibt sich diese Behauptung leicht aus der Verallgemeinerung des vorab bewiesenen Theorems $\vdash_{IAL} \sim\sim (A \supset B) \supset (\sim\sim A \supset \sim\sim B)$. Hier steht $\sim\sim \mathrm{Tr}(\Gamma)$ abkürzend für $\{\sim\sim \mathrm{Tr}(G) \mid G \in \Gamma\}$

Folgerung 5.

$$\vdash_{KAL} \neg H \quad \Leftrightarrow \quad \vdash_{IAL} \sim \mathrm{Tr}(H)$$

Mit anderen Worten, ein negierter aussagenlogischer Ausdruck ist genau dann klassisch beweisbar, wenn er (sein intuitionistisches Gegenstück) intuitionistisch beweisbar ist.
Beweis: elementar aus dem Satz von Glivenko und dem Theorem $\vdash_{IAL} \sim\sim\sim A \supset \sim A$.

12 02.01.1897 Kiew - 15.02.1940 Moskau
13 Diese werden gelegentlich auch als Sätze von Glivenko bezeichnet.

Folgerung 6. *Für den Fall, dass* H *allein die Junktoren* $\neg$ *und* $\wedge$ *enthält, gilt:*

$$\vdash_{KAL} H \quad \Leftrightarrow \quad \vdash_{IAL} Tr(H)$$

Beweis: Sei $\vdash_{KAL} H$. Offensichtlich kann H im beschriebenen Fall nur die Form $\neg H_1$ oder $H_1 \wedge H_2$ haben, denn junktorfreie (atomare) Ausdrücke sind nicht beweisbar. Im ersten Fall ist die Behauptung schon bewiesen (wegen der unmittelbar vorhergehenden Folgerung). Betrachten wir daher den zweiten Fall: H ist $H_1 \wedge H_2$. Dann aber gilt mit $\vdash_{KAL} H$ auch $\vdash_{KAL} H_1$ und $\vdash_{KAL} H_2$. und wir haben für H_i wiederum zwei Fälle zu unterscheiden. Diejenigen H_i, die eine Konjunktion als Hauptjunktor haben, sind auch für sich genommen beweisbar. Letztlich enden wir mit Ausdrücken der Form $\neg G$, die allesamt klassisch beweisbar sein müssen. Sie sind aber auch, wie bereits gezeigt, intuitionistisch beweisbar, dann aber auch ihre Konjunktion, also gilt letztlich $\vdash_{IAL} H$.
Nun ist bekannt, dass (klassische!) Negation und Konjunktion eine funktional vollständige Junktorbasis bilden, daher sind spätestens hier einige Anmerkungen über das Verhältnis von klassischer und intuitionistischer Aussagenlogik angebracht.

Die intuitionistische Aussagenlogik ist offensichtlich nicht syntaktisch vollständig, es gibt nicht beweisbare Ausdrücke, die - als Axiome zum Kalkül hinzugefügt - einen syntaktisch widerspruchsfreien Kalkül erzeugen. Beispiele sind natürlich $A \cup \sim A$, $\sim\sim A \supset A$, aber auch $(A \supset B) \cup (B \supset A)$ u.a.
Die intuitionistische Aussagenlogik ist auch nicht strukturell vollständig, d.h. es gibt zulässige Regeln, die nicht ableitbar sind.

Ein Beispiel einer solchen Regel ist die Kreisel/Putnam-Regel (auch Harrops Regel).

$$\frac{\sim A \supset B \cup C}{(\neg A \supset B) \cup (\sim A \supset C)}$$

Dass diese Regel nicht ableitbar ist, ergibt sich unmittelbar aus der Nichtbeweisbarkeit von

$$(\sim A \supset B \cup C) \supset ((\sim A \supset B) \cup (\sim A \supset C))$$

Dummetts **LC** (man ergänzt das Axiomenschema $(A \supset B) \cup (B \supset A)$ zu den Axiomen von IAL) ist dagegen strukturell vollständig!

5 ANDERE KALKÜLFORMEN FÜR DIE INTUITIONISTISCHE AUSSAGENLOGIK

- Tableau-Kalküle
  - Tableaus nach Fitting $\Rightarrow$ DarF
  - Tableaus nach Priest $\Rightarrow$ G. Priest
- Sequenzenkalkül: Gentzen $\Rightarrow$ DarF
- Natürliches Schließen (Gentzen, Prawitz) $\Rightarrow$ DarF
- Dialogische Logik (Lorenzen)

Da die zuvor genannten Kalkülformen Gegenstand des Kurses Darstellungsformen der Logik sind, sei hier nur auf die Dialogische Logik näher eingegangen.

Dialogische Logik

Die dialogische Logik geht zurück auf Untersuchungen von Paul Lorenzen und Kuno Lorenz (etwa in den fünfziger Jahren des 20. Jahrhunderts), die um eine Fundierung der Logik, insbesondere der konstruktiven (intuitionistischen) Logik bemüht waren.[14] In der englischen Literatur und in einer verwandten Form auch als Game Semantics bekannt. Einige aktuelle Entwicklungen machen verschiedene Anwendungsaspekte dieser Darstellungsform geltend.

Die folgende Darstellung[15] bezieht sich auf eine spezifische Form des Dialog-Kalküls, die der intuitionistischen Logik adäquat ist. Dies ist *nicht* die generelle, allgemeine Darstellung des Dialog-Kalküls. Die Idee ist, dass in einem Dialogspiel mit Angriffs- und Verteidigungsregeln über die Gültigkeit (Beweisbarkeit) logischer Ausdrücke entschieden wird.

Allgemeine Regeln des Spiels:
Beteiligt sind jeweils zwei Akteure, Proponent und Opponent genannt. Diese sind abwechselnd zum Zug verpflichtet, wobei der Proponent mit dem Setzen des fraglichen Ausdrucks beginnt.

Die Akteure sind nicht gleichberechtigt:
„(1) Der Proponent darf nur eine der vom Opponenten gesetzten Formeln angreifen oder sich gegen den letzten Angriffszug des Opponenten verteidigen. (2) Der Opponent darf nur die im vorhergehenden Zug des Proponenten gesetzte Formel angreifen oder sich gegen den Angriff im vorhergehenden Zug des Proponenten verteidigen.“[16]

Der Proponent hat den Dialog gewonnen, wenn er einen atomaren Ausdruck zu verteidigen hat, nachdem zuvor dieser atomare Ausdruck vom Opponenten behauptet wurde.

Ein Ausdruck ist gültig in der dialogischen Logik, wenn der Proponent das Dialogspiel um diesen Ausdruck gegen jede Strategie des Opponenten gewinnen kann.

14 Lorenz, K. / P. Lorenzen: Dialogische Logik. WBG, Darmstadt 1978; Neueren Datums: Logik. Eine dialog-orientierte Einführung. Edition am Gutenbergplatz Leipzig 2003.
15 nach K. Berka, L. Kreiser: Logik-Texte. Kommentierte Auswahl zur Geschichte der modernen Logik, Berlin: Akademie 1971
16 K. Berka, L. Kreiser: op. cit., S. 173

Für zusammengesetzte Ausdrücke gelten folgende Junktorregeln:

Behauptung	Angriff	Verteidigung
$H_1 \wedge H_2$	L?	H_1
$H_1 \wedge H_2$	R?	H_2
$H_1 \vee H_2$	?	H_1
$H_1 \vee H_2$	?	H_2
$H_1 \rightarrow H_2$	H_1?	H_2
$\neg H_1$	H_1 ?	—

Im Fall eines Angriffs auf einen negierten Ausdruck ist keine Verteidigung möglich; im Fall der Implikation und der Negation ist der Angriff auf einen Ausdruck zwingend an das Setzen eines betimmten Teilausdrucks gebunden.
Atomare Ausdrücke können nicht angegriffen und auch nicht verteidigt werden.
Beispiele:

Opponent			Proponent	
			[1]	$p \vee \sim p$
[2]		? [1]	[3]	p

Dieses Dialogspiel hat der Proponent verloren, es gilt aber zu beachten, dass er in Zug [3] eine andere Möglichkeit der Verteidigung gehabt hätte:

Opponent			Proponent	
			[1]	$p \vee \sim p$
[2]		? [1]	[3]	$\sim p$
[4]	p	? [1]		

Auch dieses Dialogspiel verliert der Proponent. Damit ist der Dialog um den fraglichen Ausdruck (das tertium non datur) nicht gewinnbar, der Ausdruck ist in der dialogischen Lgik nicht gültig.

Betrachten wir ein weiteres Beispiel:

Opponent			Proponent		
			[1]	$\sim\sim (\sim\sim p \supset p)$	
[2]	$\sim (\sim\sim p \supset p)$	? [1]	[3]	$\sim\sim p \supset p$	? [2]
[4]	$\sim\sim p$	? [3]	[5]	$\sim p$	? [4]
[6]	p	[5]	[7]	$\sim\sim p \supset p$	? [2]
[8]	$\sim\sim p$	? [7]	[9]	p	[8]

Bei diesem Beispiel ist anzumerken, dass der Proponent durchaus Möglichkeiten hat, den Dialog anders zu gestalten. Entscheidend aber ist, das er eine Strategie gefunden hat den Dialog so zu führen, dass er, egal wie der Opponent agiert, stets gewinnt. Der Ausdruck $\sim\sim (\sim\sim p \supset p)$ ist also gültig im Dialog-Kalkül.

Ein letztes Beispiel:

Opponent			Proponent		
			[1]	$\sim\sim ((p \supset q) \cup (q \supset p))$	
[2]	$\sim ((p \supset q) \cup (q \supset p))$	? [1]	[3]	$(p \supset q) \cup (q \supset p)$	? [2]
[4]		? [3]	[5]	$p \supset q$	[4]
[6]	p	?[5]	[7]	$(p \supset q) \cup (q \supset p)$	? [2]
[8]		? [7]	[9]	$q \supset p$	[8]
[10]	q	?[5]	[11]	p	[10]

Auch hier hat der Proponent eine Strategie, das Spiel um diesen Ausdruck so zu gestalten, dass er stets gewinnt. Letzteres gilt nicht für den Ausdruck $(p \supset q) \cup (q \supset p)$.

Das Dialogspiel ist erweiterbar auf die Prädikatenlogik.

Modifiziert man die Regeln in geeigneter Weise, so kann man das Dialogspiel zu einem Spiel für die klassische Logik machen.

6 SEMANTIK: KRIPKE-MODELLE

Gödel hatte bereits 1930 nachgewiesen, dass es keine endlichwertigen adäquaten Matrizen für die intuitionistische Aussagenlogik gibt. Zwar gibt es eine unendlichwertige adäquate Matrix, doch dies ist von geringem praktischen Nutzen und auch der heuristische Wert einer solchen Modelltheorie ist weit von dem einer „Semantik“ entfernt. Der Aufgabenkalkül von Kolmogorow hatte hohen heuristischen Wert, ließ aber Präzision bei der Bewertung (resp. Beurteilung) komplexerer Ausdrücke missen
Deshalb soll hier eine zweiwertige, aber nicht wahrheitsfunktionale Semantik betrachtet werden, die, wie schon die Semantik der Modallogik, auf S. Kripke[17] zurückgeht. Grundidee ist wiederum die einer Welten-Semantik, wobei in diesem Fall die Referenzpunkte (vormals: Welten) eher als Wissenszustände angesehen werden.

Definition 2. Ein *IAL-Modell* ist nach dieser Theorie ein Tripel $\langle W, R, v\rangle$, wobei wiederum

- W eine nichtleere Menge von Welten/Wissenszuständen $\{w_1, w_2, \ldots\}$ o.ä ist;
- R eine transitive und reflexive zweistellige Relation in W sei[18],
- v eine Belegung für AV relativ zu möglichen Welten ist, d.h. eine Zuordnung $\{(\alpha, w_i) | \alpha \in AV, w_i \in W\} \mapsto \{W, F\}$.
- v erfüllt die Persistenzbedingung (v ist hereditär), d.h. $\forall \alpha \in AV, \forall w, w' \in W : wRw' \Rightarrow [v(\alpha, w) = W \Rightarrow v(\alpha, w') = W]$

Die Belegungsfunktion v induziert eindeutig eine Bewertungsfunktion, die ebenfalls mit v bezeichnet sei durch folgende Bewertungsvorschriften bestimmt ist:

M1. $v(\sim H, w) = W$	gdw.	$v(H_1, w') = F$ für alle $w' : wRw'$
M2. $v(H_1 \cap H_2, w) = W$	gdw.	$v(H_1, w) = v(H_2, w) = W$
M3. $v(H_1 \cup H_2, w) = W$	gdw.	$v(H_1, w) = W$ oder $v(H_2, w) = W$
M4. $v(H_1 \supset H_2, w) = W$	gdw.	$v(H_1, w') = W \Rightarrow v(H_2, w') = W$ für alle $w' : wRw'$

Die Persistenzbedingung ist unverzichtbar, sie ist inhaltlich zu verstehen als Persistenz der wahren atomaren Sätze, diese werden aus einer Welt in die Nachfolgerwelt(en) vererbt.

Wie schon im Fall der modallogischen Semantik könnte man die Modelle in zwei Komponenten, einen Rahmen $\langle W, R\rangle$ und eine beliebige (unter Vorbehalt der Persistenzbedingung) zuzuordnende Belegung aufteilen; hier sei jedoch davon abgesehen.

Definition 3. Ein Ausdruck H heißt *gültig im (IAL-)Modell* $\langle W, R, v\rangle$ gdw. $v(H, w) = W$ für beliebige $w \in W$.
Der Ausdruck H heißt *(IAL-)allgemeingültig* gdw. dieser Ausdruck in jedem IAL-Modell gültig ist. In diesem Fall notiert man $\vDash_{IAL} H$.

Bevor wir Beispiele allgemeingültiger und auch nicht allgemeingültiger Ausdrücke betrachten, sei zuerst nachgewiesen, dass die Persistenz im IAL-Modell nicht nur für atomare, sondern für beliebige Ausdrücke gilt.

Satz 7. *In einem IAL-Modell* $\langle W, R, v\rangle$ *gilt für beliebige Ausdrücke* H *und beliebige* $w, w' \in W$*:* $wRw' \Rightarrow [v(H, w) = W \Rightarrow v(H, w') = W]$.
Dieser Satz sagt nichts anderes, als dass Nachfolgerwelten die Wahrheiten ihrer Vorgänger erben: was wahr war, bleibt in jeder Nachfolgerwelt wahr (Persistenz der Wahrheit).

17 Kripke, S. A., Semantical analysis of intuitionistic logic, 1965
18 Gelegentlich wird auch Antisymmetrie von R gefordert.

Der Beweis diese Satzes wird mittels Induktion über den Ausdrucksaufbau geführt. Die Basisbehauptung ist in der Definition des IAL-Modells verankert. Zu betrachten sind im Induktionsschritt folgende vier Fälle:

(i) $H \equiv\sim H_1$
(ii) $H \equiv H_1 \cap H_2$
(iii) $H \equiv H_1 \cup H_2$
(iv) $H \equiv H_1 \supset H_2$

Von den einfachen Fällen (ii) und (iii) sei hier exemplarisch nur (iii) bewiesen. Sei also $v(H, w) = v(H_1 \cup H_2, w) = W$. Dann ist nach M3 $v(H_1, w) = W$ oder $v(H_2, w) = W$. Da für H_1 und H_2 die Induktionsvoraussetzung gilt, ist für jedes w' mit wRw': $v(H_1, w') = W$ oder $v(H_2, w') = W$. Das bedeutet aber nach M3: $v(H_1 \cup H_2, w') = v(H, w') = W$.
Zu (i): Sei jetzt $v(H, w) = v(\sim H_1, w) = W$. Das bedeutet nach M1, dass für alle w' mit wRw': $v(H_1, w') = F$. Angenommen, es gälte für ein w^1 mit wRw^1: $v(\sim H_1, w^1) \neq W$, also $v(\sim H_1, w^1) = F$. Dann müsste es einen R-Nachfolger w^2 von w^1 geben mit $vH_1, w^2) = W$. Wegen der Transitivität von R gilt auch wRw^2, daher müsste nach der ersten Überlegung auch $vH_1, w^2) = F$ gelten.
Analog verläuft die Argumentation im Fall (iv). ■

Schließlich noch eine Bemerkung zu speziellen IAL-Modellen: Reduziert man W auf einelementige Mengen, so liegt eine spezielle Modellklasse vor, sie soll IAL^1-Modell genannt werden.

Ein Beispiel:

1. $\vDash_{IAL} p \supset\sim\sim p$
   Wenn wir das Gegenteil annehmen, so müsste es ein IAL-Modell $\langle W, R, v\rangle$ mit $w \in W$ geben, so dass $v(p \supset\sim\sim p, w) = F$, also müsste für ein w^0 mit wRw^0 gelten $v(p, w^0) = W$ und $v(\sim\sim p, w^0) = F$. Letzeres bedeutet, dass für ein w^1 mit w^0Rw^1: $v(\sim p, w^1) = W$. Dies wiederum heißt, dass für beliebige w', die R-Nachfolger von w^1 sind, $v(p, w') = F$, also insbesondere auch für w^1: $v(p, w') = F$. Dies macht nun eine Widerspruch offensichtlich: Wegen der Persistenz folgt aus $v(p, w^0) = W$ und w^0Rw^1 nämlich $v(p, w^1) = W$. Somit kann es ein solches Modell nicht geben, der Ausdruck $p \supset\sim\sim p$ ist IAL-allgemeingültig.

Wie auch in der Modallogik, kann man aus entsprechenden Nachweisen für die Nicht-Allgemeingültigkeit leicht widerlegende Modelle konstruieren; für den Ausdruck $p \cup \sim p$ sei dies hier illustriert:

$$\begin{tikzcd} & w^0 \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ w^1 & & w^2 \end{tikzcd}$$

Hier ist $W = \{w^0, w^1, w^2\}$,
$R = \{\langle w^0, w^1\rangle, \langle w^0, w^2\rangle\}$
mit $v(p, w^1) = W$ und $v(p, w^2) = F$

Eine Anmerkung zur Belegungsfunktion des IAL-Modells ist angebracht. Die Belegung komplexer Ausdrücke erfolgt für den Fall, dass $\cap$ oder $\cup$ als Hauptjunktoren auftreten analog zur klassischen Logik (bzw. den entsprechenden Festlegungen für $\wedge$ und $\vee$ in der Modallogik). Die intuitionistische Negation und die Implikation werden „modal" behandelt, also so wie man eine modalisierte Negation bzw. eine modalisierte Implikation bewertungstechnisch behandeln würde. So gesehen, steht also $\sim H$ für $\Box\neg H$ und $H_1 \supset H_2$ für $\Box(H_1 \to H_2)$.

Diese Beobachtung wird sich noch als nützlich für das Verständnis einer Einbettung erweisen.
Es gilt:

Satz 8 (Korollar: Adäquatheit)**.** $\models_{IAL} H \Leftrightarrow \vdash_{IAL} H$.

NB Zum Vollständigkeitssatz ist eine Anmerkung angebracht. Der Beweis des Vollständigkeitssatzes verwendet einen Kontrapositionsschluss der Form:

$$\frac{\text{Wenn nicht } B \text{ , dann nicht } A.}{\text{Wenn } A\text{, dann } B.}$$

Gleichzeitig ist festzustellen, dass die objektsprachliche Regel

$$\frac{\sim B \supset \sim A}{A \supset B}$$

keine zulässige Regel von IAL ist!
Da wir jedoch nicht in IAl, sondern über IAL räsonieren, ist dies, wenn auch bemerkenswert bis merkwürdig, so doch legitim.
Eine Ausnahme von dieser weit verbreiteten Praxis ist: Veldman, W., 1976, An intuitionistic completeness theorem for intuitionistic predicate logic, Journal of Symbolic Logic, 41(1) 159-166.

Korrespondenzen

Schon aus der Arbeit von Gödel 1932[19] ist bekannt, dass es eine streng monoton „fallende“ Folge[20] von Kalkülen gibt, die zwischen der klassischen und der intuitionistischen Aussagenlogik liegen. Solche Kalküle werde superintuitionistische (oder auch intermediäre) Logiken genannt.
Hier sei für Dummets Logik **LC** die korrespondierende Modellbedingung aufgeführt:
LC = IAL $\oplus$ $(A \supset B) \cup (B \supset A)$ ist charakterisiert durch diejenigen IAL-Modelle, in denen R eine lineare Ordnung ist.

19 Zum intuitionistischen Aussagenkalkül, (s. z.B. Logik-Texte VI.3)
20 im Sinne der im Kalkül beweisbaren Ausdrücke

7 GÖDELS EINBETTUNG

K. Gödel beschreibt 1933[21] eine Übersetzung intuitionistischer Junktoren in die in die Sprache der klassischen Logik, erweitert um einen Notwendigkeitsoperator **B**.[22] Im Original wird die Übersetzungsfunktion so definiert:

$$\begin{aligned}
\mathsf{Tr}(\sim \mathsf{H}_1) &\equiv \neg\mathbf{B}\mathsf{Tr}(\mathsf{H}_1)\\
\mathsf{Tr}(\mathsf{H}_1 \cap \mathsf{H}_2) &\equiv \mathsf{Tr}(\mathsf{H}_1) \wedge \mathsf{Tr}(\mathsf{H}_2)\\
\mathsf{Tr}(\mathsf{H}_1 \cup \mathsf{H}_2) &\equiv \mathbf{B}\mathsf{Tr}(\mathsf{H}_1) \vee \mathbf{B}\mathsf{Tr}(\mathsf{H}_2)\\
\mathsf{Tr}(\mathsf{H}_1 \supset \mathsf{H}_2) &\equiv \mathbf{B}\mathsf{Tr}(\mathsf{H}_1) \rightarrow \mathbf{B}\mathsf{Tr}(\mathsf{H}_2)
\end{aligned}$$

wobei Gödel selbst darauf verweist, dass man mit gleichem Effekt auch $\sim \mathsf{H}_1$ durch $\mathbf{B}\neg\mathbf{B}\mathsf{Tr}(\mathsf{H}_1)$ und $\mathsf{H}_1 \cap \mathsf{H}_2$ durch $\mathbf{B}\mathsf{Tr}(\mathsf{H}_1) \wedge \mathbf{B}\mathsf{Tr}(\mathsf{H}_2)$ übersetzen könne. Die Logik der **B**-Ausdrücke beschreibt Gödel als Erweiterung der klassischen Logik um die Axiome(nschemata)

$\mathbf{B}\mathsf{H} \rightarrow \mathsf{H}$,
$\mathbf{B}\mathsf{H}_1 \rightarrow (\mathbf{B}(\mathsf{H}_1 \rightarrow \mathsf{H}_2) \rightarrow \mathbf{B}\mathsf{H}_2)$ und
$\mathbf{B}\mathsf{H} \rightarrow \mathbf{B}\mathbf{B}\mathsf{H}$ sowie
die Regel „Aus A darf auf **B**A geschlossen werden“.

Dieser Kalkül ist unschwer als die Modallogik $\mathsf{S4}$ auszumachen. Gödel stellt fest, dass sich auf diese Weise die intuitionistische Logik in $\mathsf{S4}$ einbetten lässt: Ein Ausdruck der intuitionistischen Aussagenlogik ist beweisbar in IAL gdw. seine Übersetzung in $\mathsf{S4}$ beweisbar ist. Wichtig ist der Hinweis Gödels, dass $\mathsf{S4}$ nur näherungsweise als Beweisbarkeits-logik angesehen werden kann.
Heute gebräuchlicher ist eine einfachere Übersetzung, für die hier auch statt des Beweisbarkeitsoperators der gewöhnliche Notwen-digkeitsoperator verwendet werden soll.

Definition 4.

$$\begin{aligned}
\mathsf{TR}(\alpha) &\equiv \Box\alpha\\
\mathsf{TR}(\sim \mathsf{H}_1) &\equiv \Box\neg\mathsf{TR}(\mathsf{H}_1)\\
\mathsf{TR}(\mathsf{H}_1 \cap \mathsf{H}_2) &\equiv \mathsf{TR}(\mathsf{H}_1) \wedge \mathsf{TR}(\mathsf{H}_2)\\
\mathsf{TR}(\mathsf{H}_1 \cup \mathsf{H}_2) &\equiv \mathsf{TR}(\mathsf{H}_1) \vee \mathsf{TR}(\mathsf{H}_2)\\
\mathsf{TR}(\mathsf{H}_1 \supset \mathsf{H}_2) &\equiv \Box(\mathsf{TR}(\mathsf{H}_1) \rightarrow \mathsf{TR}(\mathsf{H}_2))
\end{aligned}$$

Diese Definition ist nicht nur einfacher als die ursprüngliche, sie „entlarvt“ auch die Idee, die Kripkes semantischer Konstruktion zugrunde liegt.

21 Eine Interpretation des intuitionistischen Aussagenkalküls"(s. z.B. Logik-Texte VI.4)
22 Die Verwendung von **B** bei Gödel ist nicht zufällig, will er doch diesen Operator als „ist beweisbar“ verstanden wissen.